LICEO SCIENTIFICO “A. EINSTEIN” Milano

PROGRAMMA DI MATEMATICA CLASSE 4^ SEZ. A
Anno scolastico 2024-2025 prof Laura Simone

ripasso FUNZIONE ESPONENZIALE E LOGARITMICA
Funzione esponenziale e logaritmica
Proprietà dei logaritmi (con dim.) .
Equazioni e disequazioni esponenziali.
Equazioni e disequazioni logaritmiche.
Risoluzione grafica di equazioni e disequazioni con esponenziali o logaritmi.

GONIOMETRIA:
Formule goniometriche
Archi associati, funzioni goniometriche degli archi associati.
Formule di addizione e sottrazione per seno, coseno, tangente.
Formule di duplicazione, di bisezione, parametriche;
Espressioni ed identità.
Applicazioni alla geometria analitica: coefficiente angolare di una retta, angolo formato da due rette.
Identità goniometriche;
Equazioni “elementari” ed equazioni riconducibili ad elementari.
Equazioni risolubili mediante applicazione di formule goniometriche.
Equazioni lineari in seno e coseno: uso delle formule parametriche, dell'angolo ausiliario, del metodo grafico.
Equazioni omogenee di primo grado in seno e coseno. Equazioni omogenee e riconducibili ad omogenee di secondo grado in seno e coseno.
Disequazioni goniometriche “elementari” e riconducibili ad elementari. Disequazioni lineari.
Disequazioni omogenee di secondo grado in seno e coseno.

TRIGONOMETRIA
Triangolo rettangolo: teoremi relativi e risoluzione del triangolo rettangolo. Area di un triangolo noti due lati e l’angolo compreso; teoremi della corda, dei seni, di Carnot. Problemi geometrici con risoluzione per via trigonometrica.
Problemi trigonometrici risolubili tramite equazioni o disequazioni goniometriche.

GEOMETRIA SOLIDA
Rette e piani nello spazio. Perpendicolarità e ortogonalità, parallelismo fra rette e piani. Diedri e angoloidi. Piani perpendicolari; Poliedri, prismi, piramidi, tronchi di piramide, poliedri regolari. Corpi rotondi e solidi di rotazione;Volume e superfici di solidi di rotazione. Problemi di geometria solida; applicazioni della trigonometria alla geometria solida. Rapporto di similitudine tra lunghezze, aree e volumi.

GEOMETRIA ANALITICA DELLO SPAZIO
Punti, rette e piani nello spazio;
passaggio dalla forma parametrica a quella cartesiana della retta;
condizioni di parallelismo e perpendicolarità tra rette, rette e piano;
distanza punto-piano e distanza punto-retta.
equazione della sfera.

CALCOLO COMBINATORIO equazioni e disequazioni con coefficienti binomiali; permutazioni semplici e con ripetizione; disposizioni semplici e con ripetizione; combinazioni semplici e con ripetizione.

ANALISI MATEMATICA
Definizione topologica e metrica di limite finito o infinito per una funzione in un punto (finito o infinito).
Teoremi sui limiti (unicità, confronto e permanenza del segno).
Algebra dei limiti e calcolo di alcune forme di indeterminazione (somma, prodotto, quoziente, esponenziale).

Lavoro estivo

0 $\log_5 \sqrt{x+1} + 2\log_{25} \sqrt{x+3} \geqslant \frac{1}{2} - \log_{\frac{1}{5}} x$ $\left[0 < x \leqslant \frac{3}{2}\right]$

1 $\log_x 4 + \log_{\frac{1}{x}} (x+1) \leqslant 0$ $[0 < x < 1 \vee x \geqslant 3]$

2 $x^{\log_2 x} - 2x^{-\log_2 x} \geqslant 1$ $\left[0 < x \leqslant \frac{1}{2} \vee x \geqslant 2\right]$

2 $\log_{\frac{1}{2}} \log_3 \log_2 (x-1) \geqslant 0$ $[3 < x \leqslant 9]$

3 $\dfrac{\ln(1-3x)}{\log_{\frac{1}{10}} x - \log_{\frac{1}{10}} (2-x)} < 1$ $\left[0 < x < \frac{1}{3}\right]$

4 $7^{2-\log_2 x} > 0$ $[x > 0]$

5 $(2-\sqrt{2})^x - 4\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)^x \leqslant 3$ $[x \leqslant \log_{2-\sqrt{2}} 4]$

0 $\operatorname{sen}^2 x - \left(\sqrt{3}+1\right) \operatorname{sen} x \cos x + \sqrt{3} \cos^2 x = 0$ $\left[\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{3} + k\pi\right]$

1 $4\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x - 3\cos^4 x - 1 = 0$ $\left[k\frac{\pi}{3}\right]$

2 $5\operatorname{sen}^4 x + 6\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x + 5\cos^4 x = 4$ $\left[\pm\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}\right]$

3 $4\operatorname{sen}^2 x - 3\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x + \cos^4 x = 1$ $\left[\pm\frac{\pi}{6} + k\pi; k\pi\right]$

4 $\operatorname{tg} \frac{x}{6} \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \frac{x}{6} + \operatorname{tg} x - 1 = 0$ $\left[\frac{\pi}{4} + k\pi\right]$

5 $\operatorname{tg} x - 2\operatorname{ctg} x + 1 = 0$ $\left[-\operatorname{arctg}(2) + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi\right]$

6 $\sqrt{-\cos 2x} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{3}{2}\pi - x\right)$ $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; -\frac{3}{4}\pi + k\pi\right]$

12 La diagonale di un prisma retto a base quadrata è 2 cm e forma con la diagonale di una faccia laterale un angolo di 30°. Trova il volume del prisma. $[\sqrt{2}]$

13 Sia ABC un triangolo i cui lati $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ misurano rispettivamente a e $2a$. Determina l'angolo acuto $A\widehat{B}C$ in modo che il rapporto tra il volume del solido generato dalla rotazione completa del triangolo ABC intorno alla retta AB e quello del cilindro che ha raggio di base $\overline{AC}$ e altezza di misura a, sia uguale a $\frac{4}{15}$. $\left[A\widehat{B}C = \arccos\left(\frac{12}{15}\right)\right]$

14 Un cono retto è inscritto in una sfera di raggio r. Del cono si conosce l'angolo di semiapertura $\frac{\alpha}{2}$; della sfera si conosce il volume $\mathcal{V}$. Determina:

a. il raggio r della sfera in funzione di $\mathcal{V}$;

b. la relazione tra il volume $\mathcal{V}'$ del cono e le variabili r e α.

Fare un'applicazione numerica.

$$\left[r = \sqrt[3]{\frac{3\mathcal{V}}{4\pi}}; \frac{2}{3}\pi r^3 \operatorname{sen}^2\alpha \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2}\right]$$

15 Un cono retto, di semiapertura $\frac{\alpha}{2}$ e volume $\mathcal{V}$, è inscritto in una sfera di raggio r'. Determina:

a. il raggio di base del cono, in funzione di α e di $\mathcal{V}$;

b. la relazione tra il volume $\mathcal{V}'$ del cono e le variabili r e α.

Fare un'applicazione numerica.

$$\left[r = \sqrt[3]{\frac{3\mathcal{V}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\pi}}; \frac{2}{3}\pi r^3 \operatorname{sen}^2\alpha \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2}\right]$$

16 Nel parallelepipedo rettangolo, a base quadrata la diagonale, la cui misura è d, forma con il piano della base un angolo di 60°.
Scrivi l'espressione del volume del solido in funzione di d.
Quanto è d nel caso in cui l'area totale sia $\mathcal{A}_t = 100\,(1 + 2\sqrt{6})$. $\left[\mathcal{V} = \frac{\sqrt{3}}{16}d^3; d = 20\right]$

17 Calcola il volume di un cono nei seguenti casi:

a. sono assegnati il raggio di base r e l'angolo α formato da una generatrice con il piano della base; $\left[\mathcal{V} = \pi\frac{r^3}{3}\operatorname{tg}\alpha\right]$

b. sono assegnati una generatrice a e l'angolo β semiapertura del cono che essa forma con l'asse di simmetria. $\left[\mathcal{V} = \pi\frac{a^3}{3}\operatorname{sen}^2\beta\cos\beta\right]$

18 È dato un cono circolare retto avente r come raggio di base. Determina la semiapertura x del cono in modo che il suo volume risulti uguale al prodotto del raggio della sfera in esso inscritta per πr^2. $[x = 15°]$

19 Considera una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$. Determina un punto P sulla semicirconferenza, in modo che risulti uguale a $\frac{2}{3}$ il rapporto tra il volume del solido generato dalla rotazione completa del triangolo ABP intorno alla retta AP e quello del solido generato dalla rotazione completa del rettangolo di base AB e altezza PH, con H proiezione ortogonale di P su AB, intorno alla retta AB.

20 Considera un triangolo equilatero ABC di lato ℓ. Determina un punto P appartenente al lato AC in modo che la somma del volume del solido generato dalla rotazione completa intorno alla retta AC del triangolo ABP con il prodotto $\overline{PB} \cdot \overline{BC}^2 \cdot \pi$ risulti uguale a $\frac{5}{4}\ell^3\pi$.

21 L'area della superficie laterale di una piramide retta $ABCDS$ è 312 cm^2.
La base $ABCD$ è un trapezio isoscele circoscrittibile, del quale si sa che $AD = BC = 13$ cm e che $DC = 8$ cm. Dopo aver determinato la misura (in cm) dell'apotema della piramide, calcola il volume del cono, di vertice S, inscritto nella piramide. $[a = 12; \mathcal{V} = 72\sqrt{3}\,\pi \text{ cm}^3]$

22 Sia ABC un triangolo avante l'angolo $\widehat{B} = 120°$ e sia D il punto in cui la bisettrice dell'angolo $\widehat{B}$ interseca il lato AC. Sapendo che $\overline{BD} = 3$, determina l'angolo $\widehat{A}$ in modo che, detta $\mathcal{S}_1$ la superficie laterale del cono generato dalla rotazione di AD intorno ad AB e $\mathcal{S}_2$ la superficie laterale del cilindro che ha come raggio di base BD e altezza CD, risulti $2\mathcal{S}_1 + \sqrt{3\mathcal{S}_2} = 3\pi \cdot \overline{AD} \cdot \overline{CD}$. $[x = 30°]$

23 In una piramide retta a base quadrata $ABCDE$ sia r il raggio della circonferenza di centro O inscritta nella base. Detti H il piede dell'altezza EH di una faccia laterale e $E\widehat{H}O = x$, scrivi la relazione che esprime la differenza tra il doppio del volume del cono generato dalla rotazione del triangolo EOH intorno ad OH e quello della piramide. Trova il valore dell'angolo x per cui tale funzione assume il valore $\frac{2}{\pi}r^3$. $\left[x = \operatorname{arctg}\frac{3}{\pi}\right]$

1 Trova le coordinate del punto di intersezione tra la retta
$\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+4}{5}$ e il piano di equazione $-x+y-5z+4=0$. $\left[\left(\frac{121}{26}; \frac{36}{13}; \frac{11}{26}\right)\right]$

2 Scrivi l'equazione del piano passante per la retta
$r: \begin{cases} z-3x-5=0 \\ 2y-5z+3=0 \end{cases}$
e perpendicolare al piano di equazione $2x-y+z+1=0$. $[21x+10y-32z+50=0]$

3 Scrivi l'equazione del piano passante per la retta
$r: \begin{cases} x=-t+4 \\ y=2t-1 \\ z=5t-8 \end{cases}$
e parallelo al piano $x+3y-z-6=0$. $[x+3y-z-9=0]$

4 Scrivi l'equazione del piano passante per la retta
$r: \begin{cases} x-6y-z-4=0 \\ 2x-y+z-3=0 \end{cases}$
e per il punto $A(0; -1; 4)$. $[3x-7y-7=0]$

5 Scrivi l'equazione del piano passante per la retta
$r: \begin{cases} x=3t-1 \\ y=t+2 \\ z=-2t-5 \end{cases}$
e per il punto $A(-3; 1; -1)$. $[2x-8y-z+13=0]$

6 Scrivi l'equazione del luogo dei punti equidistanti da $P(-2; 2; 1)$ e dal piano $2x-y=0$.
$[x^2+4y^2+5z^2+4xy+20x-20y-10z+45=0]$

7 Stabilisci per quale valore di h risultano incidenti le rette $\begin{cases} x=3t \\ y=-6t \\ z=2t \end{cases}$ e $\begin{cases} x=ht' \\ y=-3t'+1 \\ z=(h+1)t' \end{cases}$. $[h=-3]$

8 Scrivi l'equazione della retta perpendicolare al piano su cui giacciono i punti $A(4; 1; -2)$, $B(2; 0; 5)$ e $C(1; -1; 0)$ che passa per il baricentro del triangolo ABC.
$\left[\frac{x-\frac{7}{3}}{12}=\frac{y}{-17}=z-1\right]$

264 Anna ha dieci amici.

a. In quanti modi può invitarne 5 a pranzo?

b. In quanti modi può invitarne 5 a pranzo, se due dei dieci amici sono sposati e partecipano alla cena solo insieme?

c. In quanti modi può invitarne 5 a pranzo, se due di essi hanno litigato e partecipano solo separatamente?

[**a.** 252; **b.** 112; **c.** 196]

265 In una classe di 24 studenti, di cui 10 femmine e 14 maschi, si deve formare un gruppo per una ricerca costituito da 3 maschi e 3 femmine. In quanti modi può essere costituito il gruppo se tra i 14 maschi ci sono due gemelli e si decide che non possano stare insieme? [42 240]

266 In quanti modi è possibile suddividere 12 penne in 6 cassetti, ammettendo che le 12 penne siano indistinguibili e che qualche cassetto possa restare vuoto? [6188]

Realtà e modelli

267 **Comitato direttivo.** In un gruppo di 26 persone, 10 donne e 16 uomini, deve essere scelto un comitato direttivo costituito da un presidente, un vicepresidente e un segretario. Uno dei 16 uomini è il sig. Bianchi.

a. In quanti modi diversi è possibile scegliere il comitato?

b. In quanti modi diversi è possibile scegliere il comitato, se il posto di segretario deve essere occupato da una donna?

c. In quanti modi diversi è possibile scegliere il comitato, se si decide di assegnare il posto di presidente al sig. Bianchi?

d. In quanti modi diversi è possibile scegliere il comitato, se si decide di assegnare il posto di presidente a un uomo e il posto di vicepresidente a una donna?

e. In quanti modi diversi è possibile scegliere il comitato, se si vuole che presidente e vicepresidente siano di sesso diverso? [**a.** 15 600; **b.** 6000; **c.** 600; **d.** 3840; **e.** 7680]

268 **Giuria.** Si vuole formare una giuria composta da 6 persone. I membri della giuria sono da scegliere tra 6 uomini e 7 donne. Una delle 7 donne è la signora Verdi.

a. In quanti modi diversi è possibile comporre la giuria?

b. In quanti modi diversi è possibile comporre la giuria, se essa deve essere composta da 3 uomini e 3 donne?

c. In quanti modi diversi è possibile comporre la giuria, se essa deve essere composta da 3 uomini e 3 donne e tra le tre donne deve necessariamente essere presente la signora Verdi? [**a.** 1716; **b.** 700; **c.** 300]

[495]

257 **Realtà e modelli** **Esame di stato.** La commissione d'esame di stato (o maturità) è costituita da 7 membri: tre docenti interni (cioè in servizio presso lo stesso istituto dei candidati), tre docenti esterni e un presidente. Nel corso delle prove orali, i sette commissari si dispongono in fila lungo il lato di un tavolo, riservando l'altro allo studente esaminato.

a. In quanti modi possono accomodarsi i sette membri della commissione?

b. In quanti modi, se i commissari interni vogliono sedere affiancati e così pure i commissari esterni?

c. In quanti modi, se il presidente intende occupare la posizione centrale della fila, mentre gli altri sei possono accomodarsi liberamente?

d. In quanti modi, se il presidente vuole sedere al centro della fila, i membri interni affiancati e così pure i membri esterni? [**a.** 5040; **b.** 216; **c.** 720; **d.** 72]

258 **E se?** La squadra di calcio di Pietro conta esattamente 2 portieri, 8 difensori, 7 centrocampisti e 5 attaccanti. Per una questione di equità, l'allenatore seleziona i giocatori titolari casualmente, ma in coerenza con lo schema di gioco: per esempio, scegliendo lo schema 4-5-1 giocano 4 difensori, 5 centrocampisti e 1 attaccante, oltre a 1 portiere. Calcola tutte le possibili formazioni secondo lo schema 4-3-3. Occorre distinguere i ruoli all'interno dello stesso reparto (per esempio, terzino sinistro e terzino destro vanno considerati ruoli diversi, anche se appartenenti allo stesso reparto difensivo).

▶ Come cambierebbe la risposta considerando tutti i possibili schieramenti secondo lo schema 5-3-2? [42 336 000; 56 448 000]

269 Un'urna contiene 10 palline: 5 nere numerate da 1 a 5, 3 rosse numerate da 6 a 8, e 2 bianche numerate 9 e 10. Supponendo di estrarre dall'urna cinque palline, successivamente e rimettendo nell'urna l'ultima pallina estratta prima dell'estrazione successiva, determina:

a. in quanti modi è possibile estrarre le cinque palline;

b. in quanti modi è possibile estrarre cinque palline, di cui esattamente 2 rosse.

Rispondi poi nuovamente alle domande **a** e **b**, sia nel caso in cui le cinque palline siano estratte successivamente ma senza reimmissione sia nel caso in cui siano estratte contemporaneamente. [**a.** 10^5; **b.** 30 870; nel caso di estrazioni successive senza reimmissione le risposte ad **a** e **b** diventano rispettivamente 30 240 e 12 600; nel caso di estrazione contemporanea, le risposte ad **a** e **b** diventano rispettivamente 252 e 105]

270 Si estraggono contemporaneamente 5 carte da un mazzo di 32: un mazzo di questo tipo è costituito da 8 carte per ciascuno dei quattro semi (cuori, quadri, picche e fiori): 7, 8, 9, 10, fante, donna, re, asso. In quanti modi diversi è possibile estrarre 5 carte contenenti:

a. nessun asso;

b. esattamente 2 donne;

c. almeno 3 fanti;

d. 2 carte di picche e 3 di cuori;

e. 2 carte di un colore e 3 di un altro;

f. almeno un fante;

g. esattamente 3 carte di cuori ed esattamente 2 re.

[**a.** 98 280; **b.** 19 656; **c.** 1540; **d.** 1568; **e.** 134 400; **f.** 103 096; **g.** 1428]

271 Un'urna contiene 10 palline: tre bianche, numerate da 1 a 3 e sette nere, numerate da 4 a 10.
Si estraggono successivamente senza reimmissione 4 palline. In quanti modi diversi è possibile estrarre:

a. 4 palline nere;

b. 3 palline nere e 1 bianca, in quest'ordine;

c. 3 palline nere e 1 bianca, in ordine qualsiasi;

d. 2 palline bianche e 2 palline nere, in ordine qualsiasi;

e. almeno 3 palline nere;

f. al massimo 3 palline nere.

[**a.** 840; **b.** 630; **c.** 2520; **d.** 1512; **e.** 3360; **f.** 4200]

272 Un'associazione di n persone deve eleggere un comitato direttivo di k persone (k fissato, con $k \leq n$), una delle quali sarà il presidente dell'associazione. In quanti modi diversi l'associazione può eleggere il comitato direttivo e il presidente? Rispondi a questa domanda determinando nei due modi diversi seguenti il numero delle possibili scelte dell'associazione:

a. supponendo che l'associazione scelga prima il comitato direttivo e poi il comitato direttivo elegga, all'interno di quest'ultimo, il presidente;

b. supponendo che l'associazione elegga prima il presidente, poi il presidente scelga gli altri membri del comitato direttivo.

Quale identità puoi dedurre dal confronto dei risultati ottenuti in **a** e in **b**? Dimostra questa identità algebricamente.

$\left[\mathbf{a.}\ k\binom{n}{k};\ \mathbf{b.}\ n\binom{n-1}{k-1}\right]$

273 Un'associazione di n persone deve eleggere un comitato direttivo formato da un numero qualunque di persone e un presidente del comitato. In quanti modi diversi l'associazione può eleggere il comitato direttivo e il presidente? Rispondi a questa domanda determinando in due modi diversi il numero delle possibili scelte dell'associazione:

a. supponendo che l'associazione scelga prima il comitato direttivo e poi il comitato direttivo elegga, all'interno di quest'ultimo, il presidente;

b. supponendo che l'associazione elegga prima il presidente, poi il presidente scelga gli altri membri del comitato direttivo.

Quale identità puoi dedurre dal confronto dei risultati ottenuti in **a** e in **b**?

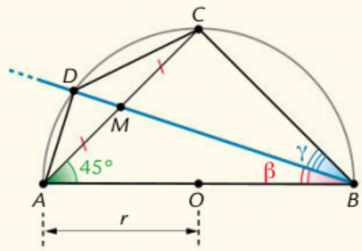
$\left[\mathbf{a.}\ \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k};\ \mathbf{b.}\ n\cdot 2^{n-1}\right]$

Calcolare e applicare

1 Sia P un punto appartenente alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$ diverso da $A(-1, 0)$. Indica con α la misura dell'angolo formato dal semiasse positivo delle x con la semiretta OP, essendo O l'origine. Determina per quali valori di $\alpha \in [0, 2\pi]$ la distanza del punto $B(0, 1)$ dall'asse del segmento AP è $\frac{1}{2}$. $\left[\alpha = \frac{\pi}{3} \vee \alpha = \frac{5\pi}{3}\right]$

2 Facendo riferimento alla figura, determina:

a. la misura di BD e l'area del triangolo ABD;
b. la misura di BC e l'area del triangolo DBC;
c. l'area del quadrilatero $ABCD$ e le misure dei suoi angoli interni.



$\left[\mathbf{a.}\ \frac{3\sqrt{10}}{5}r, \frac{3}{5}r^2; \mathbf{b.}\ r\sqrt{2}, \frac{3}{5}r^2; \mathbf{c.}\ \frac{6}{5}r^2, A\widehat{B}C = 45°, B\widehat{C}D = 108°\,26'\,6'', A\widehat{D}C = 135°, D\widehat{A}B = 71°\,33'\,54''\right]$

3 Dati i punti $O(0, 0)$, $A(4, 0)$ e $B(2, 6)$, rispondi ai seguenti quesiti.

a. Dimostra che il triangolo OAB è isoscele e determina i valori di seno e coseno dei suoi angoli interni;
b. Trova il punto C tale che $OACB$ sia un parallelogramma e determina i valori di seno e coseno degli angoli formati dalle sue diagonali.

[**a.** Detta α l'ampiezza degli angoli alla base e β quella dell'angolo al vertice, si ha: $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$, $\cos\beta = \frac{4}{5}$, $\sin\beta = \frac{3}{5}$;
b. detta γ l'ampiezza degli angoli acuti formati dalle due diagonali, si ha: $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\gamma = \frac{2}{\sqrt{5}}$]

4 A partire dai punti $O(0, 0)$, $A(3, 3)$ e $B(\sqrt{6} - \sqrt{2} + 3, \sqrt{6} + \sqrt{2} + 3)$, si vuole costruire un parallelogramma $OABC$, di cui si richiede quanto segue:

a. le coordinate del vertice C;
b. le ampiezze degli angoli che le rette OA e OC formano con l'asse x;
c. la misura degli angoli interni del parallelogramma;
d. l'area del parallelogramma. [**a.** $(\sqrt{6} - \sqrt{2}, \sqrt{6} + \sqrt{2})$; **b.** 45°, 75°; **c.** 30°, 30°, 150°, 150°; **d.** $6\sqrt{2}$]

5 Sia ABC un triangolo rettangolo di ipotenusa BC, in cui $A\widehat{B}C = \frac{\pi}{6}$ e $\overline{BC} = 2a$. Tracciata la semicirconferenza di diametro BC che non contiene A, considera un punto P sulla semicirconferenza e indica con H, K e R, rispettivamente le proiezioni di P sulla retta AC, sulla retta AB e sulla retta BC. Determina quindi $P\widehat{B}C = x$ in modo che $\overline{PH} + \overline{PK} = (1 + \sqrt{3})\overline{PR}$. $\left[x = \frac{\pi}{6} \vee x = \frac{\pi}{4}\right]$

6 Data una semicirconferenza di diametro AB, centro O e raggio r, prolunga AB dalla parte di B di un segmento BC congruente al raggio. Siano P e Q due punti della semicirconferenza tali che $A\widehat{O}P = P\widehat{O}Q = x$; determina x in modo che risulti: $\overline{PC}^2 \geq 2\overline{QC}^2 + \overline{PQ}^2$. $\left[\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right]$

7 In un trapezio rettangolo $ABCD$, avente base maggiore AB e base minore CD, risulta $\widehat{A} = \widehat{D} = 90°$, $\widehat{B} = 45°$ e $\overline{AD} = \overline{DC} = a$. Considera un punto P appartenente al lato AD e traccia da P la parallela al lato BC che incontra AB in Q; indica quindi con R la proiezione di Q su BC. Determina $P\widehat{C}D = x$ in modo che sia soddisfatta la relazione:

$$\overline{PC} + 2\sqrt{2}\,(\overline{PQ} + \overline{QR}) = 6a$$

$\left[x = \frac{\pi}{6}\right]$

8 In una semicirconferenza di diametro AB e centro O, il cui raggio misura 1, è data la corda BC tale che $A\widehat{B}C = \frac{\pi}{3}$. Considera un punto D sull'arco $\widehat{AC}$ tale che $D\widehat{A}B = x$ e determina x in modo che l'area del quadrilatero $ABCD$ sia minore o uguale a $\frac{3 + \sqrt{3}}{4}$. $\left[\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{4} \vee \frac{5\pi}{12} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right]$

Risolvere problemi e costruire modelli

26 Il comandante di una nave decide di raggiungere il porto *B* partendo dal punto *A* e seguendo un percorso rettilineo. A causa di un errore, però, la nave inizia la sua navigazione lungo una rotta leggermente diversa da quella prevista. Dopo 5 ore ci si accorge dello sbaglio e il comandante ordina di virare di un angolo di 23° in modo da dirigere ora esattamente verso il porto *B*, che viene raggiunto dopo 3 ore. Se l'imbarcazione ha mantenuto sempre velocità costante, quanto tempo si è perso a causa dell'errore?

(Sessione suppletiva 2009) [9 minuti]

27 Un turista, che osserva un lago scozzese dalla cima di un fiordo alto 100 metri, vede spuntare la testa di un mostro acquatico in un punto per il quale misura un angolo di depressione di 18,45°. Il mostro, che nuota in linea retta allontanandosi dall'osservatore, si immerge, per riemergere cinque minuti più tardi in un punto per cui l'angolo di depressione vale 14,05°. Con che velocità, in metri all'ora, sta nuotando il mostro?

(Sessione suppletiva PNI 2009) [1200 m/h]

28 Due osservatori si trovano ai lati opposti di un grattacielo, a livello del suolo. La cima dell'edificio dista 1600 metri dal primo osservatore, che la vede con un angolo di elevazione di 15°. Se il secondo individuo si trova a 650 metri dalla cima del grattacielo, qual è la distanza tra i due osservatori?

(Sessione straordinaria PNI 2010) [2046,49 m]

Verifica, in base alla definizione, i seguenti limiti.

134 $\lim_{x\to-\infty}(3x+4)=-\infty$ $\left[x<-\frac{4}{3}-\frac{M}{3}\right]$

135 $\lim_{x\to1}\ln(2-x)=0$ $[2-e^{\varepsilon}<x<2-e^{-\varepsilon}]$

136 $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3+2}=0$ $\left[x>\sqrt[3]{-2+\frac{1}{\varepsilon}}\right]$

137 $\lim_{x\to0^+}(3+\ln x)=-\infty$ $[0<x<e^{-3-M}]$

138 $\lim_{x\to-1}(x^3+1)=0$ $[\sqrt[3]{-1-\varepsilon}<x<\sqrt[3]{-1+\varepsilon}]$

139 $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-1}{x+1}=3$ $\left[x>-1+\frac{4}{\varepsilon}\right]$

140 $\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}=4$ $[2-\varepsilon<x<2+\varepsilon]$

141 $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x}=+\infty$ $\left[x>\frac{M+\sqrt{M^2+4}}{2}\right]$

270 $\lim\limits_{x\to5^-}\dfrac{x}{x-5}$ $[-\infty]$

271 $\lim\limits_{x\to0^+}\left[\left(\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)(e^x-2)\right]$ $[-\infty]$

272 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x+1}{\cos x}$ $[1]$

273 $\lim\limits_{x\to+\infty}[x^2(1-e^x)]$ $[-\infty]$

274 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{\sin x-1}$ $[+\infty]$

275 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{x}$ $[-\infty]$

278 $\lim\limits_{x\to4^+}\dfrac{\log_2 x}{2-\log_2 x}$ $[-\infty]$

279 $\lim\limits_{x\to0^+}(e^{\frac{1}{x}}+e^x)$ $[+\infty]$

280 $\lim\limits_{x\to0^-}(e^{\frac{1}{x}}+e^x)$ $[1]$

281 $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\log_2 x-\log_4 x}{\log_x 16}$ $\left[\dfrac{1}{2}\right]$

282 $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-\sqrt{x}}$ $[0]$

283 $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}\dfrac{\tan x}{2x+\pi}$ $[-\infty]$

454 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2+5}}$ $[0]$

455 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}$ $[0]$

456 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-\dfrac{x^3+1}{x^2-1}\right)$ $[-1]$

457 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+\sqrt{x+1}}$ $[0]$

458 $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x+12}-4}{x-4}$ $\left[\dfrac{1}{8}\right]$

474 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+2}-\dfrac{x^2+1}{x-2}\right)$ $[-4]$

475 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+1}-2x-1)$ $[-1]$

476 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{2x-x^2}$ $\left[-\dfrac{1}{12}\right]$

477 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-x}$ $[-1]$

478 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+2}{x+\sqrt{x^2+1}}$ $[-\infty]$

---

487 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\sqrt{x}+\sqrt{4x}}{2+\sqrt{9x}}$ $[1]$

488 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-2x}{x^3-x-6}$ $\left[\dfrac{2}{11}\right]$

489 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{x-1}$ $\left[\dfrac{1}{4}\right]$

490 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^6-1}{x^4-1}$ $\left[\dfrac{3}{2}\right]$

491 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3+x^2+2x+2}{x^2-1}$ $\left[-\dfrac{3}{2}\right]$

492 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x+2a)^2-9x^2}{x^2-a^2}$, con $a\neq0$ $[-6]$

493 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2+2ax-3a^2}{x^2-3ax+2a^2}$, con $a\neq0$ $[-4]$

494 $\lim\limits_{x\to k}\dfrac{(x+k)^3-k^3}{x}$ $[7k^2]$

495 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}-x)$ $\left[\dfrac{2}{3}\right]$

---

496 Determina, al variare di $n\in\mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)^n}{x^2+3x-10}$. $\left[\text{Se } n=0, \text{ il limite vale } \infty, \text{ se } n=1, \text{ vale } \dfrac{1}{7}, \text{ se } n>1, \text{ vale } 0\right]$

497 Determina, al variare di $n\in\mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x-2)^n}{x^2+3x-10}$. [Se $n<2$, il limite vale 0, se $n=2$, vale 1, se $n>2$, vale $+\infty$]

498 Determina k in modo che $\lim\limits_{x\to k}\dfrac{x^2-4x-5}{x-k}$ esista finito. In corrispondenza di questi valori di k, calcola il limite.
[$k=-1 \vee k=5$; per $k=-1$ il limite vale -6, per $k=5$ il limite vale 6]

499 Determina k in modo che $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-5x+k}{x^2-4}$ esista finito. In corrispondenza di questo valore di k, calcola il limite.
$\left[k=6; \text{ il limite vale } -\dfrac{1}{4}\right]$

Calcola i seguenti limiti, utilizzando il teorema del confronto.

702 $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x+\sin x)$ $[+\infty]$

703 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{3+\sin x}}{x^2+1}$ $[0]$

709 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\cos x}{x+\sin x}$ $[1]$

710 $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[3]{x}\sin\ln x$ $[0]$