

PROGRAMMA DI MATEMATICA CLASSE 4[^] SEZ. B

prof Laura Simone

Anno scolastico 2023-2024 prof Laura Simone

Ripasso GONIOMETRIA:

Formule goniometriche

Archi associati, funzioni goniometriche degli archi associati.

Formule di addizione e sottrazione per seno, coseno, tangente.

Formule di duplicazione, di bisezione, parametriche;

Espressioni ed identità.

Applicazioni alla geometria analitica: coefficiente angolare di una retta, angolo formato da due rette.

Identità goniometriche;

Equazioni "elementari" ed equazioni riconducibili ad elementari.

Equazioni risolubili mediante applicazione di formule goniometriche.

Equazioni lineari in seno e coseno: uso delle formule parametriche, dell'angolo ausiliario, del metodo grafico.

Equazioni omogenee di primo grado in seno e coseno. Equazioni omogenee e riconducibili ad omogenee di secondo grado in seno e coseno.

Disequazioni goniometriche "elementari" e riconducibili ad elementari. Disequazioni lineari.

Disequazioni omogenee di secondo grado in seno e coseno.

FUNZIONE ESPONENZIALE E LOGARITMICA

Funzione esponenziale e logaritmica

Proprietà dei logaritmi (con dim.) .

Equazioni e disequazioni esponenziali.

Equazioni e disequazioni logaritmiche.

Risoluzione grafica di equazioni e disequazioni con esponenziali o logaritmi.

TRIGONOMETRIA

Triangolo rettangolo: teoremi relativi e risoluzione del triangolo rettangolo. Area di un triangolo noti due lati e l'angolo compreso; teoremi della corda, dei seni, di Carnot. Problemi geometrici con risoluzione per via trigonometrica.

Problemi trigonometrici risolubili tramite equazioni o disequazioni goniometriche.

GEOMETRIA SOLIDA

Rette e piani nello spazio. Perpendicolarità e ortogonalità, parallelismo fra rette e piani. Diedri e angoloidi. Piani perpendicolari; Poliedri, prismi, piramidi, tronchi di piramide, poliedri regolari. Corpi rotondi e solidi di rotazione; Volume e superfici di solidi di rotazione. Problemi di geometria solida; applicazioni della trigonometria alla geometria solida. Rapporto di similitudine tra lunghezze, aree e volumi.

GEOMETRIA ANALITICA DELLO SPAZIO

Punti, rette e piani nello spazio;

passaggio dalla forma parametrica a quella cartesiana della retta;

condizioni di parallelismo e perpendicolarità tra rette, rette e piano;

distanza punto-piano e distanza punto-retta.

equazione della sfera.

ANALISI MATEMATICA

Definizione topologica e metrica di limite finito o infinito per una funzione in un punto (finito o infinito).

Teoremi sui limiti (unicità, confronto e permanenza del segno).

Algebra dei limiti e calcolo delle forme di indeterminazione (somma, prodotto, quoziente, esponenziale).

Limiti notevoli .

Lavoro estivo

$$\underline{0} \quad \log_5 \sqrt{x+1} + 2 \log_{25} \sqrt{x+3} \geq \frac{1}{2} - \log_{\frac{1}{5}} x$$

$$\left[0 < x \leq \frac{3}{2} \right]$$

$$\underline{1} \quad \log_x 4 + \log_{\frac{1}{x}} (x+1) \leq 0$$

$$[0 < x < 1 \vee x \geq 3]$$

$$\underline{2} \quad x^{\log_2 x} - 2x^{-\log_2 x} \geq 1$$

$$\left[0 < x \leq \frac{1}{2} \vee x \geq 2 \right]$$

$$\underline{2} \quad \log_{\frac{1}{2}} \log_3 \log_2 (x-1) \geq 0$$

$$[3 < x \leq 9]$$

$$\underline{3} \quad \frac{\ln(1-3x)}{\log_{\frac{1}{10}} x - \log_{\frac{1}{10}} (2-x)} < 1$$

$$\left[0 < x < \frac{1}{3} \right]$$

$$\underline{4} \quad 7^{2-\log_2 x} > 0$$

$$[x > 0]$$

$$\underline{5} \quad (2-\sqrt{2})^x - 4 \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2} \right)^x \leq 3$$

$$[x \leq \log_{2-\sqrt{2}} 4]$$

$$\underline{0} \quad \sin^2 x - (\sqrt{3}+1) \sin x \cos x + \sqrt{3} \cos^2 x = 0$$

$$\left[\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{3} + k\pi \right]$$

$$\underline{1} \quad 4 \cos^2 x + \sin^2 x \cos^2 x - 3 \cos^4 x - 1 = 0$$

$$\left[k \frac{\pi}{3} \right]$$

$$\underline{2} \quad 5 \sin^4 x + 6 \sin^2 x \cos^2 x + 5 \cos^4 x = 4$$

$$\left[\pm \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\underline{3} \quad 4 \sin^2 x - 3 \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x = 1$$

$$\left[\pm \frac{\pi}{6} + k\pi; k\pi \right]$$

$$\underline{4} \quad \operatorname{tg} \frac{x}{6} \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \frac{x}{6} + \operatorname{tg} x - 1 = 0$$

$$\left[\frac{\pi}{4} + k\pi \right]$$

$$\underline{5} \quad \operatorname{tg} x - 2 \operatorname{ctg} x + 1 = 0$$

$$\left[-\operatorname{arctg}(2) + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi \right]$$

$$\underline{6} \quad \sqrt{-\cos 2x} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{3}{2}\pi - x\right)$$

$$\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; -\frac{3}{4}\pi + k\pi \right]$$

Reader

- 1 Nel triangolo equilatero ABC il lato AC è diviso in due parti dal punto P ; determina l'ampiezza dell'angolo $\widehat{ABP}$ in modo che l'area del triangolo $\widehat{ABP}$ sia il doppio dell'area del triangolo BPC .

$$\left[x = \arctg \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$$

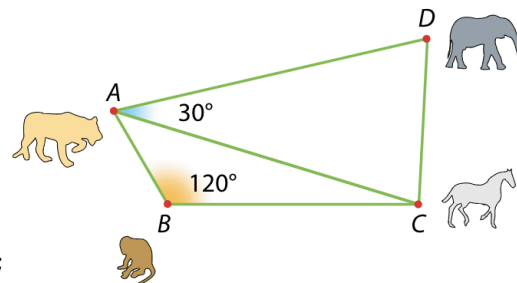
- 2 Dato un triangolo ABC con lati $BC = 6$ cm e $AC = 5$ cm, siano M e N i punti medi dei lati BC e AB ; determina $x = \widehat{ACB}$ in modo che il perimetro del triangolo BMN sia $\frac{45}{4}$ cm.

$$\left[x = \arcsen \frac{3}{4} \right]$$

- 3 **NELLA REALTÀ** Uno zoo è delimitato da quattro segmenti, come mostra la figura. In A c'è la gabbia dei leoni, in B quella delle scimmie, in C quella delle zebre e in D quella degli elefanti. Si sa che $AB = 300$ m, $BC = 700$ m, $AD = 900$ m, $\widehat{ABC} = 120^\circ$, $\widehat{CAD} = 30^\circ$.

Determina:

- la distanza tra la gabbia delle zebre e quella degli elefanti;
- la distanza tra la gabbia delle scimmie e quella degli elefanti;
- l'area dello zoo. $[\sim 463,1 \text{ m}; \sim 861,4 \text{ m}; \sim 387\,671,6 \text{ m}^2]$



- 4 Sia ABC un triangolo rettangolo in cui $\widehat{ABC} = 30^\circ$, $\overline{AB} = a$ e sia AH l'altezza relativa all'ipotenusa BC . Considerato un punto P sul cateto AB , dimostra che esiste un angolo $\widehat{AHP}$ tale che valga la seguente relazione:

$$\frac{\overline{AH} + \overline{AP}}{\overline{BH}} = \frac{\overline{PH}}{\overline{AH}}.$$

- 5 Data una circonferenza di centro O e raggio unitario, si prendano su di essa tre punti A, B, C , tali che $AB = BC$.

- Si calcoli, in funzione dell'angolo $\widehat{AOB} = x$, la quantità $AB^2 + BC^2 + CA^2$ controllando che risulti:
 $f(x) = -4 \cos^2 x - 4 \cos x + 8$.
- Si studi la funzione $f(x)$ e si tracci il suo grafico γ nell'intervallo $0 \leq x \leq 2\pi$.
- Si verifichi che la curva γ è simmetrica rispetto alla retta di equazione $x = \pi$.

[Maturità, sessione suppletiva 2010]

12 La diagonale di un prisma retto a base quadrata è 2 cm e forma con la diagonale di una faccia laterale un angolo di 30° . Trova il volume del prisma. $[\sqrt{2}]$

13 Sia ABC un triangolo i cui lati $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ misurano rispettivamente a e $2a$. Determina l'angolo acuto $\widehat{ABC}$ in modo che il rapporto tra il volume del solido generato dalla rotazione completa del triangolo ABC intorno alla retta AB e quello del cilindro che ha raggio di base $\overline{AC}$ e altezza di misura a , sia uguale a $\frac{4}{15}$. $\left[\widehat{ABC} = \arccos\left(\frac{12}{15}\right)\right]$

14 Un cono retto è inscritto in una sfera di raggio r . Del cono si conosce l'angolo di semiapertura $\frac{\alpha}{2}$; della sfera si conosce il volume $\mathcal{V}$. Determina:

- il raggio r della sfera in funzione di $\mathcal{V}$;
- la relazione tra il volume $\mathcal{V}'$ del cono e le variabili r e α .

Fare un'applicazione numerica.

$$\left[r = \sqrt[3]{\frac{3\mathcal{V}}{4\pi}}; \frac{2}{3}\pi r^3 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}\right]$$

15 Un cono retto, di semiapertura $\frac{\alpha}{2}$ e volume $\mathcal{V}$, è inscritto in una sfera di raggio r' . Determina:

- il raggio di base del cono, in funzione di α e di $\mathcal{V}$;
- la relazione tra il volume $\mathcal{V}'$ del cono e le variabili r e α .

Fare un'applicazione numerica.

$$\left[r = \sqrt[3]{\frac{3\mathcal{V} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\pi}}; \frac{2}{3}\pi r^3 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}\right]$$

16 Nel parallelepipedo rettangolo, a base quadrata la diagonale, la cui misura è d , forma con il piano della base un angolo di 60° . Scrivi l'espressione del volume del solido in funzione di d .

Quanto è d nel caso in cui l'area totale sia $\mathcal{A}_t = 100$ ($1 + 2\sqrt{6}$).

$$\left[\mathcal{V} = \frac{\sqrt{3}}{16} d^3; d = 20\right]$$

17 Calcola il volume di un cono nei seguenti casi:

- sono assegnati il raggio di base r e l'angolo α formato da una generatrice con il piano della base;

$$\left[\mathcal{V} = \pi \frac{r^3}{3} \operatorname{tg} \alpha\right]$$

- sono assegnati una generatrice a e l'angolo β semiapertura del cono che essa forma con l'asse di simmetria.

$$\left[\mathcal{V} = \pi \frac{a^3}{3} \sin^2 \beta \cos \beta\right]$$

18 È dato un cono circolare retto avente r come raggio di base. Determina la semiapertura x del cono in modo che il suo volume risulti uguale al prodotto del raggio della sfera in esso inscritta per πr^2 .

$[x = 15^\circ]$

19 Considera una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$. Determina un punto P sulla semicirconferenza, in modo che risulti uguale a $\frac{2}{3}$ il rapporto tra il volume del solido generato dalla rotazione completa del triangolo ABP intorno alla retta AP e quello del solido generato dalla rotazione completa del rettangolo di base AB e altezza PH , con H proiezione ortogonale di P su AB , intorno alla retta AB .

20 Considera un triangolo equilatero ABC di lato ℓ . Determina un punto P appartenente al lato AC in modo che la somma del volume del solido generato dalla rotazione completa intorno alla retta AC del triangolo ABP con il prodotto $\overline{PB} \cdot \overline{BC}^2 \cdot \pi$ risulti uguale a $\frac{5}{4} \ell^3 \pi$.

21 L'area della superficie laterale di una piramide retta $ABCD$ è 312 cm^2 .

La base $ABCD$ è un trapezio isoscele circoscrittibile, del quale si sa che $AD = BC = 13 \text{ cm}$ e che $DC = 8 \text{ cm}$. Dopo aver determinato la misura (in cm) dell'apotema della piramide, calcola il volume del cono, di vertice S , inscritto nella piramide.

$$[a = 12; \mathcal{V} = 72\sqrt{3} \pi \text{ cm}^3]$$

22 Sia ABC un triangolo avente l'angolo $\widehat{B} = 120^\circ$ e sia D il punto in cui la bisettrice dell'angolo $\widehat{B}$ interseca il lato AC . Sapendo che $\overline{BD} = 3$, determina l'angolo $\widehat{A}$ in modo che, detta S_1 la superficie laterale del cono generato dalla rotazione di AD intorno ad AB e S_2 la superficie laterale del cilindro che ha come raggio di base BD e altezza CD , risulti $2S_1 + \sqrt{3}S_2 = 3\pi \cdot \overline{AD} \cdot \overline{CD}$.

$[x = 30^\circ]$

23 In una piramide retta a base quadrata $ABCDE$ sia r il raggio della circonferenza di centro O inscritta nella base. Detti H il piede dell'altezza EH di una faccia laterale e $\widehat{EHO} = x$, scrivi la relazione che esprime la differenza tra il doppio del volume del cono generato dalla rotazione del triangolo EOH intorno ad OH e quello della piramide. Trova il valore dell'angolo x per cui tale funzione assume il valore $\frac{2}{\pi} r^3$.

$$\left[x = \operatorname{arctg} \frac{3}{\pi}\right]$$

- i1** Trova le coordinate del punto di intersezione tra la retta

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+4}{5} \text{ e il piano di equazione } -x + y - 5z + 4 = 0.$$

$$\left[\left(\frac{121}{26}, \frac{36}{13}, \frac{11}{26} \right) \right]$$

- i2** Scrivi l'equazione del piano passante per la retta

$$r: \begin{cases} z - 3x - 5 = 0 \\ 2y - 5z + 3 = 0 \end{cases}$$

e perpendicolare al piano di equazione $2x - y + z + 1 = 0$.

$$[21x + 10y - 32z + 50 = 0]$$

- i3** Scrivi l'equazione del piano passante per la retta

$$r: \begin{cases} x = -t + 4 \\ y = 2t - 1 \\ z = 5t - 8 \end{cases}$$

e parallelo al piano $x + 3y - z - 6 = 0$.

$$[x + 3y - z - 9 = 0]$$

- i4** Scrivi l'equazione del piano passante per la retta

$$r: \begin{cases} x - 6y - z - 4 = 0 \\ 2x - y + z - 3 = 0 \end{cases}$$

e per il punto $A(0; -1; 4)$.

$$[3x - 7y - 7 = 0]$$

- i5** Scrivi l'equazione del piano passante per la retta

$$r: \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = t + 2 \\ z = -2t - 5 \end{cases}$$

e per il punto $A(-3; 1; -1)$.

$$[2x - 8y - z + 13 = 0]$$

- i6** Scrivi l'equazione del luogo dei punti equidistanti da $P(-2; 2; 1)$ e dal piano $2x - y = 0$.

$$[x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 4xy + 20x - 20y - 10z + 45 = 0]$$

- i7** Stabilisci per quale valore di h risultano incidenti le rette $\begin{cases} x = 3t \\ y = -6t \\ z = 2t \end{cases}$ e $\begin{cases} x = ht' \\ y = -3t' + 1 \\ z = (h+1)t' \end{cases}$.

$$[h = -3]$$

- i8** Scrivi l'equazione della retta perpendicolare al piano su cui giacciono i punti $A(4; 1; -2)$, $B(2; 0; 5)$ e $C(1; -1; 0)$ che passa per il baricentro del triangolo ABC .

$$\left[\frac{x - \frac{7}{3}}{12} = \frac{y}{-17} = z - 1 \right]$$

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[5]{(x^2 - x + 1)^3} - 1}{e^x - e} \quad \left[\frac{3}{5e} \right]$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[9]{1+x} - \sqrt[9]{1-x}}{x} \quad \left[\frac{2}{9} \right]$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 5x} - e^{-\operatorname{tg} x}}{\ln(1+7x)} \quad \left[\frac{6}{7} \right]$$

$$4 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (3^x - x)^{\frac{1}{4x}} \quad \left[3^{\frac{1}{4}} \right]$$

$$5 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{e^x - 1 - x} \quad [\infty]$$

$$6 \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a} \quad \left[\frac{1}{a} \right]$$

$$7 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{2\operatorname{tg} x} - 1) \ln(2 - \cos^2 x)}{\sqrt{1+x^3} - \cos x} \quad [0]$$

$$8 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[7]{\cos^2 x} - \cos x}{\operatorname{tg}(1 - \cos x)} \quad \left[\frac{5}{7} \right]$$

$$9 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{tg} \frac{3}{x}}{\cos \frac{1}{\sqrt{x}} - 1} \quad [-6]$$

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt[4]{x})^{\frac{1}{\ln(3x)}} \quad \left[e^{\frac{1}{4}} \right]$$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+5}{x-3} \right)^{x^2-2x} \quad [+\infty]$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\operatorname{tg} x} \quad [1]$$

$$4 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \sqrt{9 + 2x^2 - x^3}}{\sqrt{5} - \sqrt{5 + 7x^2}} \quad \left[\frac{2\sqrt{5}}{21} \right]$$

$$5 \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 19} - 4}{x^3 - 2x^2 + 3x - 18} \quad \left[\frac{1}{72} \right]$$

$$6 \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \frac{6 \sin^2 x - \sqrt{2} \sin x - 2}{\operatorname{tg} x - 1} \quad \left[\frac{5}{2} \right]$$

$$7 \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\ln(-4 + x)}{\operatorname{tg} \pi x} \quad \left[\frac{1}{\pi} \right]$$

$$8 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x [\ln(x^2 + x - 3) - 2 \ln x] \quad [1]$$

$$9 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1 - \cos x} - e^{\sin^2 x}}{\ln(1 + x^2)} \quad \left[-\frac{1}{2} \right]$$

1 Sia data la curva Γ di equazione $y = \sqrt{4 - x^2}$ e l'insieme di rette $y = k^2x + 2$. Detti A e B i punti di intersezione tra il fascio e la curva Γ (B di ascissa nulla), calcola il limite del rapporto tra lunghezza della corda AB e l'ascissa di A al tendere di k a zero. [−1]

2 Data l'iperbole Γ di equazione $x^2 - y^2 = -9$ e la retta r di equazione $x - 3y - 9 = 0$, siano R e S i loro punti di intersezione ($y_R < y_S$). Sia P un punto di Γ appartenente all'arco RS e siano h e k rispettivamente le sue distanze dalla retta r e dall'asse y . Valuta il rapporto $\frac{h}{k}$ al tendere di P a S . $\left[-\frac{1}{\sqrt{10}}\right]$

3 Un triangolo isoscele, di altezza h e angolo al vertice 2α , è la sezione piana di una piramide retta a base quadrata ottenuta con un piano passante per il vertice e i punti medi di due lati opposti del quadrato di base. Calcola il limite del rapporto tra la misura della superficie laterale della piramide e l'angolo α al tendere di quest'ultimo a zero. [4h²]

-66 VERSO L'ESAME Risolvi i seguenti problemi.

4 Data una circonferenza γ di raggio unitario e centro O , tracciare una semiretta s uscente da O e intersecante γ in un punto Q . Indicato con P un generico punto di s esterno alla circonferenza γ , tracciare da esso le due tangenti alla circonferenza: siano A e B i punti di tangenza. Indicata con x la lunghezza del segmento PQ , trovare il limite per x tendente a infinito del rapporto $k = \frac{AQ + QB}{AB}$. [$\sqrt{2}$]

(Maturità scientifica, corso di ordinamento, sessione ordinaria 1992, prima parte del quesito 3)

5 In una semicirconferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$ inscrivere il triangolo ABD , retto in D . Tracciare la bisettrice dell'angolo $\widehat{DAB}$: tale bisettrice intersechi il segmento BD in E . Indicato con x l'angolo $\widehat{BAE}$, determinare il rapporto y tra la lunghezza del segmento BE e la lunghezza del segmento BD : $y = \frac{BE}{BD}$. $\left[\frac{1}{2}\right]$

Calcolare il rapporto y per x che tende a zero.

(Maturità scientifica, corso di ordinamento, sessione suppletiva 1992, prima parte del quesito 2)

6 Dato un sistema di assi cartesiani ortogonali di centro O , trovare la parabola passante per $A(1; 0)$ e tangente in $B(3; 0)$ alla retta di equazione $y = -2x + 6$. Trovare la circonferenza passante per A , B e per il vertice della precedente parabola. Calcolare il rapporto tra le lunghezze delle corde che parabola e circonferenza staccano sulla retta $y = k$ parallela all'asse delle x . Calcolare il valore a cui tende il precedente rapporto quando la retta si avvicina alla tangente comune alle due curve. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

(Maturità scientifica italiana all'estero, sessione ordinaria 1993, prima parte del quesito 3)