

Indicazioni per il periodo estivo

Istituto: Liceo Einstein Milano

Docente: Giorgio Scattareggia

Disciplina: Matematica

Classe: 3L

Anno Scolastico: 2024/2025

Al fine di consolidare quanto appreso durante l'anno scolastico, si raccomanda a tutti gli studenti di mantenere un esercizio costante, con particolare attenzione al ripasso delle definizioni, dei concetti fondamentali e delle procedure affrontate nel corso delle lezioni.

In un'ottica di autovalutazione e rafforzamento delle proprie competenze, si invitano in particolare gli studenti che ne avvertano la necessità a rivedere e ripetere le verifiche scritte proposte durante l'anno, utilizzandole come strumento di lavoro personale per individuare eventuali lacune e colmare le difficoltà riscontrate.

Per ampliare l'offerta di esercitazioni disponibili, sarà messo a disposizione anche un repertorio di verifiche somministrate in altre classi, selezionate per affinità di contenuti e livello. Tale materiale potrà costituire un utile supporto per chi desidera approfondire ulteriormente o confrontarsi con tracce diverse da quelle già svolte.

Il lavoro svolto con serietà durante la pausa estiva rappresenta un utile strumento di continuità e preparazione per i percorsi futuri.

Data: 12/06/2025

Firma del docente: Giorgio Scattareggia

Nome: _____ . Classe: 3F.

Data: 22/10/2024.

Verifica di Matematica

Docente: G. Scattareggia.

Quesito 1. Si risolva la seguente disequazione:

$$\sqrt{x^2 + 2x - 15} < x - 1.$$

Quesito 2. Si consideri una funzione f , di espressione analitica $f(x) = 1 - \sqrt{x^2 + 4}$.

- Si determini il più grande sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ su cui la funzione f può essere definita.
- Fissato come dominio di f l'insieme A determinato al punto precedente e come codominio di f l'insieme $\mathbb{R}$, si determini l'immagine di f .

Quesito 3. Si provi con il principio di induzione la seguente identità:

$$1 + 4 + 9 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Quesito 4. Si consideri l'equazione parametrica, dipendente dal numero $k \in \mathbb{R}$:

$$x^2 - (k^3 + 1)x + 1 = 0. \tag{1}$$

Si descriva l'insieme delle soluzioni $S(k)$ dell'equazione 1, indicandone esplicitamente la cardinalità, al variare di k in $\mathbb{R}$.

Quesito 5. Sia $f : A \rightarrow B$ una funzione.

- Si assuma l'esistenza di una funzione $g : B \rightarrow A$ tale che

- $\forall a \in A$ si ha che $g(f(a)) = a$;
- $\forall b \in B$ si ha che $f(g(b)) = b$.

Si dimostri che la funzione f è biettiva.

- Si assuma che la funzione f sia biettiva. Si costruisca una funzione $g : B \rightarrow A$ tale che

- $\forall a \in A$ si ha che $g(f(a)) = a$;
- $\forall b \in B$ si ha che $f(g(b)) = b$.

Nome: _____ . Classe: 3L.

Data: 23/10/2024.

Verifica di Matematica

Docente: G. Scattareggia.

Quesito 1. Si risolva la seguente equazione:

$$\sqrt{2x^2 + x + 4} = 2x - 1.$$

Quesito 2. Si consideri una funzione f , di espressione analitica $f(x) = 1 - \sqrt{x^2 + 4}$.

- Si determini il più grande sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ su cui la funzione f può essere definita.
- Fissato come dominio di f l'insieme A determinato al punto precedente e come codominio di f l'insieme $\mathbb{R}$, si determini la preimmagine dell'insieme $[-3, -2]$ mediante f .

Quesito 3. Si provi con il principio di induzione la seguente identità:

$$1 + 3 + 9 + 27 + \dots + 3^n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}.$$

Quesito 4. Si consideri l'equazione parametrica, dipendente dal numero $k \in \mathbb{R}$:

$$kx^2 - (k + 3)x - k^2 = 0. \quad (1)$$

Si descriva l'insieme delle soluzioni $S(k)$ dell'equazione (1), indicandone esplicitamente la cardinalità, al variare di k in $\mathbb{R}$.

Quesito 5. Sia $f : A \rightarrow B$ una funzione.

- Si dimostri che se f è una funzione iniettiva, allora per ogni insieme $C \neq \emptyset$ e per ogni coppia di funzioni $g_1, g_2 : C \rightarrow A$ si ha che

$$\bullet f(g_1(c)) = f(g_2(c)) \Rightarrow g_1(c) = g_2(c),$$

per ogni $c \in C$.

- Si dimostri che se f è una funzione suriettiva, allora per ogni insieme $E \neq \emptyset$ e per ogni coppia di funzioni $h_1, h_2 : B \rightarrow E$ si ha che

$$\bullet g_1(f(a)) = g_2(f(a)) \Rightarrow g_1(a) = g_2(a),$$

per ogni $a \in A$.

Nome: _____ . Classe: 3F.

Data: 10/12/2024.

Verifica di Matematica

Docente: G. Scattareggia.

Quesito 1. Sia k un numero reale; dati i vettori $\vec{u} = 3\hat{x} + (k - 3)\hat{y}$ e $\vec{v} = 2\hat{x} - k\hat{y}$, si determini per quale valore di k tali vettori sono linearmente dipendenti. Per tale valore di k si individui un vettore non nullo $\vec{s}$ perpendicolare sia a $\vec{u}$ sia a $\vec{v}$.

Quesito 2. Si descriva esplicitamente — ossia elencandone gli elementi — il seguente sottoinsieme del prodotto cartesiano $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$G = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid n^2 + m^2 = 5\}.$$

- Si dica se l'insieme G può essere il grafico di una qualche funzione $f : A \rightarrow \mathbb{N}$, dove A è un sottoinsieme di $\mathbb{N}$.
- Se la risposta è affermativa, si descrivano esplicitamente l'insieme A e la funzione f .
- Sempre se la risposta è affermativa, si dica se la funzione f è iniettiva, suriettiva, strettamente crescente, strettamente decrescente.

N.B.: si ricordi che $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ è l'insieme dei numeri naturali.

Quesito 3. Sia r la retta di equazione

$$r : y = 2x + 1.$$

Si calcoli la lunghezza della proiezione ortogonale del segmento individuato dai punti $A(2, 3)$ e $B(5, 6)$ sulla retta r .

Quesito 4. Un quadrato con vertice nel punto $A(1, 2)$ ha un lato sulla retta r di equazione $r : x - 2y + 3 = 0$. Individua le coordinate degli altri tre vertici del quadrato, sapendo che uno di essi si trova sull'asse x , mentre gli altri sono interni al primo quadrante.

Quesito 5. Si risolva la seguente equazione irrazionale:

$$\sqrt{3x + 4} = 2 + x.$$

Nome: _____ . Classe: 3L.

Data: 18/12/2024.

Verifica di Matematica

Docente: G. Scattareggia.

Quesito 1. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ di espressione analitica

$$f(x) = x^2 - 4x + 5.$$

Si determini la controimmagine mediante f dell'insieme $[-5, 7]$.

Quesito 2. Si determinino i vertici A e B del quadrato che ha come diagonale il segmento di estremi $P = (1, -3)$ e $R = (-5, 1)$; per fissare la notazione, assumiamo $y_A < y_B$. Sia T un punto sulla diagonale AB tale che $x_B - x_T < 2$; si determinino le coordinate di T affinché il triangolo PRT abbia area $\frac{13}{4}$.

Quesito 3. Sia $t > 1$ un numero reale. Si considerino i punti $A = (1, 1)$ e $B = (t, 3)$. Sia M il punto medio del segmento $\overline{AB}$ e sia P il punto di intersezione tra l'asse del segmento $\overline{AB}$ e l'asse delle ascisse.

- Si determini il valore di t affinché la proiezione ortogonale $\overline{M'P'}$ del segmento $\overline{MP}$ sulla retta $y = -x$ abbia lunghezza $\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

Nota. Si ponga $\vec{w} := \overrightarrow{PM}$: conosciamo il valore numerico della componente $w_y = y_M - y_P$ di $\vec{w}$? Questa informazione è utile per scrivere il vettore $\vec{w}$ a partire dalla lunghezza di $\overline{M'P'}$?

Quesito 4. Si consideri una retta r di equazione $ax + by + c = 0$ e sia $P = (x_P, y_P)$ un punto del piano esterno alla retta r . Sia $\vec{w} = a\hat{x} + b\hat{y}$ e sia $Q = (x_Q, y_Q)$ un punto appartenente alla retta r .

- a. Si verifichi che il vettore $\vec{w}$ è ortogonale alla retta r .
- b. Si determini un versore $\hat{n}$ ortogonale alla retta r .
- c. Si calcoli la distanza $d(P, r)$ del punto P dalla retta r , facendo uso del versore $\hat{n}$ e del punto Q .
- d. Si dimostri che la distanza $d(P, r)$ del punto P dalla retta r è data dalla formula

$$d(P, r) = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

e che, quindi, $d(P, r)$ non dipende dal punto Q scelto sulla retta r .

Nome: _____ . Classe: 3F.

Data: 11/02/2025.

Verifica di Matematica

Docente: G. Scattareggia.

Quesito 1. Si consideri la funzione

$$f(x) = 2 - \sqrt{5 + 4x - x^2}$$

- Si determini l'immagine di f , usando l'approccio studiato nel primo trimestre.
- Si disegni il grafico γ di f , verificando che γ è una semicirconferenza e indicandone il centro e il raggio.
- Si dica se la funzione f è iniettiva e si verifichi la propria risposta formalmente, dimostrando l'iniettività o esibendo un controesempio.
- Si disegni il grafico della funzione $g(x) = |f(x)|$.

Quesito 2. Si consideri la circonferenza γ di equazione

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 8 = 0$$

- Si disegni la circonferenza γ .
- Si determinino le rette tangenti a γ passanti per il punto $P(3, 6)$.
- Si indichino con T e T' i punti di tangenza tra le rette tangenti trovate e γ . Per distinguere T e T' , si scelga T come il punto di ascissa maggiore. Si mostri esplicitamente che la retta l , passante per P e per T , soddisfa la definizione formale di retta tangente, data in termini del polinomio di molteplicità di intersezione.

Quesito 3. Sia $\gamma : x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ una circonferenza e sia $P(x_P, y_P)$ un punto appartenente alla circonferenza.

- Si trasli la circonferenza γ in modo che il punto P venga a coincidere con l'origine degli assi: si scriva l'equazione della nuova circonferenza γ' .
- Si verifichi che l'equazione di γ' è della forma $x^2 + y^2 + g(x, y) = 0$, dove $g(x, y)$ è un polinomio omogeneo di primo grado in $\mathbb{R}[x, y]$.
- La curva algebrica piana r definita dal polinomio $g(x, y)$ è una retta: si dimostri che r è tangente a γ' nell'origine degli assi.
- Si trasli la retta r mediante l'inversa della traslazione che ha portato P in $O(0, 0)$: si dica qual è la relazione tra la retta così ottenuta e la circonferenza γ .

Nome: _____ . Classe: 3L.

Data: 19/02/2025.

Verifica di Matematica

Docente: G. Scattareggia.

Quesito 1. Si considerino le funzioni

$$f(x) = 1 - \sqrt{-x^2 + x + 6},$$
$$g(x) = 1 + \frac{|x-1|}{x-1} \sqrt{-x^2 + x + 6}.$$

- Si disegnino i grafici φ e γ , rispettivamente di f e di g .
- Si scrivano le equazioni della simmetria $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ rispetto alla retta $x = 1$.
- Si scrivano le equazioni delle curve trasformate $\varphi' = F(\varphi)$ e $\gamma' = F(\gamma)$, e si disegnino le curve φ' e γ' sul grafico cartesiano.

Quesito 2. Siano $A = (3, 4)$ e $B = (9, 4)$; sia, inoltre, r la retta di equazione $3x + 4y - 25 = 0$.

- Si determini l'equazione della circonferenza γ passante per A e B e avente in A come tangente la retta r .
- Si verifichi esplicitamente, usando la definizione di tangente data in termini del polinomio di intersezione, che r è tangente a γ in A .

Quesito 3. Si consideri la funzione $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita dalle equazioni:

$$\begin{cases} x' = 1, \\ y' = x + y. \end{cases}$$

- Si verifichi che F non è una trasformazione del piano. Si dica, inoltre, se F è iniettiva (“si dica” significa *dimostrazione* o *controesempio*).
- Siano $P_1 = (1, 5)$ e $P_2 = (2, 3)$. Si determinino gli insiemi

$$\gamma_1 := F^{-1}(P_1) = \{Q \in \mathbb{R}^2 \mid F(Q) = P_1\},$$
$$\gamma_2 := F^{-1}(P_2) = \{Q \in \mathbb{R}^2 \mid F(Q) = P_2\}.$$

Che tipo di figura è γ_1 ? E per quanto riguarda γ_2 , cosa possiamo dire?

- Si consideri la semicirconferenza γ , di centro $O = (0, 0)$ e raggio 2, contenuta nel semipiano delle ordinate non negative.
 - Si scriva la funzione $f: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, il cui grafico sia γ .
 - Si determini, inoltre, l'insieme $\gamma' := F(\gamma)$, ossia l'immagine di γ attraverso F .

Nota: poiché F non è una trasformazione del piano, non è possibile utilizzare le tecniche di calcolo a cui siamo abituati per determinare $F(\gamma)$. D'altra parte, ogni punto $P \in \gamma$ è della forma $P = (t, f(t))$, per qualche $t \in [-2, 2]$, dunque ...

- d. Avendo svolto il punto precedente, si descriva, senza necessariamente svolgere i conti, quale tecnica si potrebbe utilizzare per determinare l'immagine della circonferenza

$$\alpha : x^2 + y^2 = 4$$

attraverso la funzione F .

Nome: _____ . Classi: 3F – 3L.

Data: 05/03/2025.

Verifica di Matematica

Docente: G. Scattareggia.

Quesito 1. Si scrivano le definizioni di funzione iniettiva e suriettiva, e si scriva la definizione di immagine di una funzione. Si consideri, quindi, la funzione

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \\ f(x) = x^2 + 1.$$

- Si dica se f è iniettiva, e si motivi la risposta con una dimostrazione o con un controesempio.
- Si determini l'immagine di f , e si dica se f è suriettiva.
- Si dica per quale sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ è definita la funzione $\sqrt{f(x)}$, e si risolva l'equazione

$$\sqrt{f(x)} = 2x - 3.$$

Quesito 2. Sia k un numero reale. Si considerino i vettori

$$\vec{v} = -2\hat{x} + k\hat{y}, \\ \vec{w} = 3\hat{x} + 2\hat{y}.$$

- Si dica per quale valore di k i vettori sono linearmente dipendenti.
- Si dica per quale valore di k i vettori sono ortogonali.
- Si scriva l'equazione della retta r passante per l'origine e perpendicolare al vettore $\vec{w}$.
- Detti $A = (1, 1)$ e $B = (2, 3)$, si calcoli la proiezione ortogonale del segmento $\overline{AB}$ lungo la retta r .
- Si scriva la definizione di retta passante per un punto Q e di direzione data da un vettore $\vec{t}$.

Quesito 3. Siano $A = (2, -1)$, $B = (4, 3)$ e $D = \left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)$ tre punti del piano.

- Assumendo che AB sia la base di un triangolo isoscele ABC , che D sia il circocentro del triangolo, e che l'ascissa x_C del vertice C del triangolo sia negativa, si determinino le coordinate del punto C .

Nome: _____ . Classe: 3L.

Data: 19/03/2025.

Verifica di Matematica

Docente: G. Scattareggia.

Quesito 1. Si risolvano i seguenti problemi.

- a. Si scrivano le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza

$$\gamma : x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0 ,$$

passanti per il punto $A(4, 1)$.

- b. Si scriva l'equazione della circonferenza α di centro $C(-1, 3)$, e tangente alla retta

$$r : 3x + 4y + 1 = 0 .$$

Quesito 2. Si risolvano i seguenti problemi.

- a. Si considerino le due parabole:

$$\gamma_1 : y = 2x^2 - x + 3 ,$$

$$\gamma_2 : y = 2x^2 - 5x + 9 .$$

Si dica se esiste un vettore $\vec{v}$ che induce una traslazione che trasforma γ_1 in γ_2 . In caso affermativo, si scrivano esplicitamente il vettore $\vec{v}$ e le equazioni della traslazione.

- b. Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$ tre numeri reali non nulli. Si determini il vettore $\vec{v}$ che induce una traslazione che trasforma la parabola $\alpha_1 : y = ax^2 + bx + c$ in $\alpha_2 : y = ax^2$.

Quesito 3. Si determinino le equazioni delle rette tangenti alla parabola $\gamma : x = y^2 - 1$, passanti per il punto $P\left(-1, \frac{1}{2}\right)$.

Quesito 4. Si scriva la definizione di parabola con asse orizzontale, espressa come una curva algebrica piana.

Nome: _____ . Classe: 3F.

Data: 01/04/2025.

Verifica di Matematica

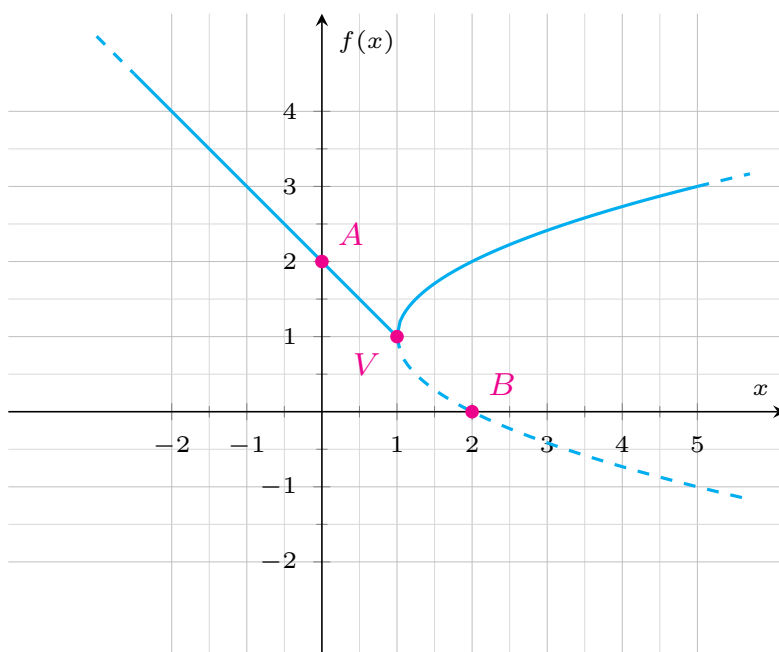
Docente: G. Scattareggia.

Quesito 1. Sia $k \in \mathbb{R}$ un parametro reale; sia r la retta passante per i punti $A(-1, 3)$ e $B(1, -1)$, e sia γ la parabola di equazione $y = x^2 + 3x + 2k - 1$.

- Si determini il valore di k per cui la retta r è tangente a γ .

Quesito 2. Si determini una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, il cui grafico sia descritto dalla figura sottostante, sapendo che:

- i punti A , B e V hanno rispettivamente coordinate $(0, 2)$, $(2, 0)$ e $(1, 1)$;
- per $x \in (-\infty, 1)$ il grafico di f è una retta parallela alla bisettrice del secondo e del quarto quadrante e passa per il punto A ;
- per $x \in [1, +\infty)$ il grafico di f è un ramo di parabola;
- il ramo di parabola simmetrico rispetto a quello descritto dalla funzione f passa per B ;
- il punto V è il vertice della parabola.



Quesito 3. Siano

$$r : y = \frac{3-x}{2}, \qquad \gamma : y = -x^2 + 2x + 3$$

una retta e una parabola; siano A e B i loro punti di intersezione, e sia V il vertice della parabola.

- Si calcoli l'area del triangolo ABV .

Quesito 4. Sia $\gamma : x = ay^2 + by + c$ una parabola e sia $P(x_0, y_0)$ un punto su γ diverso dal vertice della parabola.

- Si dimostri che il coefficiente angolare m della retta r , tangente a γ in P , è dato dalla formula seguente:

$$m = \frac{1}{2ay_0 + b}.$$

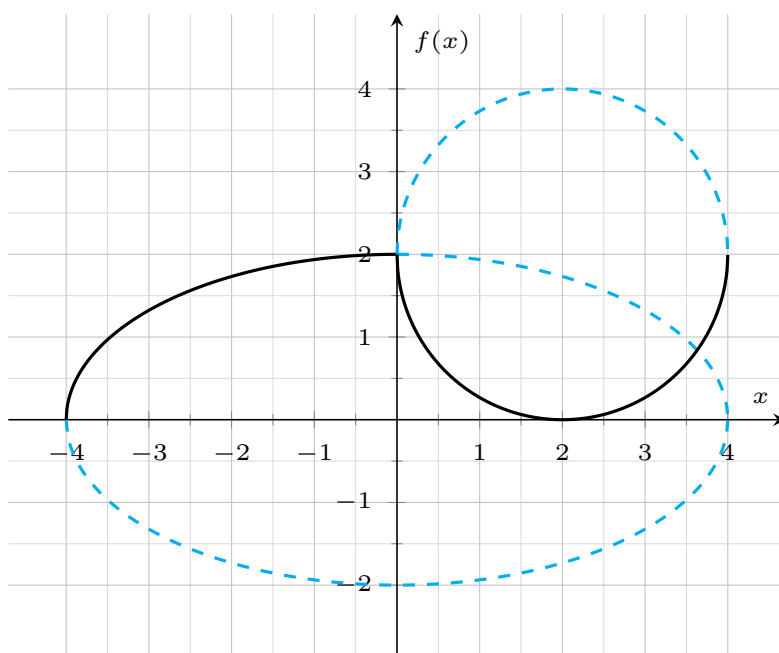
Nome: _____ . Classe: 3F.

Data: 13/05/2025.

Verifica di Matematica

Docente: G. Scattareggia.

Quesito 1. Si determini l'insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ e la funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ il cui grafico sia descritto dalla figura sottostante, sapendo che tale figura è composta da un arco di ellisse e da un arco di circonferenza.



Quesito 2. Si determini il valore di $k \in \mathbb{R}$ affinché l'ellisse γ di equazione

$$\frac{x^2}{k+6} + \frac{y^2}{1-k} = 1$$

risulti tangente alla retta $r : y = -2x + 4$.

Quesito 3. Si disegni l'iperbole γ di equazione

$$x^2 - 4y^2 + 2x - 24y - 31 = 0.$$

Si determini il vettore $\vec{v}$ che induce una traslazione che porti l'iperbole γ in una nuova iperbole γ' avente il centro di simmetria nell'origine degli assi.

Quesito 4. Si determini guadagno, interesse complessivo e tasso di interesse (composto) dell'obbligazione

$$f = \{(-4, 0), (1, 1), (5, 2)\}.$$

Nome: _____ . Classe: 3L.

Data: 14/05/2025.

Verifica di Matematica

Docente: G. Scattareggia.

Quesito 1. Si stimi il numero di soluzioni della seguente equazione, usando il metodo grafico:

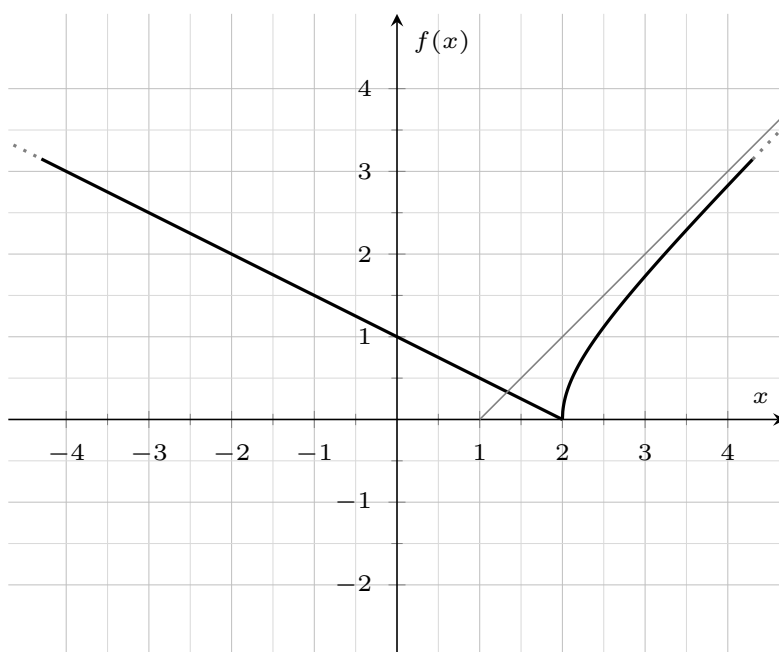
$$-2\sqrt{-4x^2 + 8x} = -\frac{4}{3}x.$$

Quesito 2. Si consideri la circonferenza γ di equazione

$$x^2 + y^2 = 5.$$

- Si determinino i punti A e B su γ in cui la tangente ha direzione $\vec{v} = \hat{x} - 2\hat{y}$.
- Sia ω l'ellisse di centro l'origine passante per A e per B , e avente un vertice nel punto $V(3, 0)$; si scriva l'equazione di ω .

Quesito 3. Si determini la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ il cui grafico sia descritto dalla figura sottostante, sapendo che tale figura è composta da una semiretta e da un arco di iperbole.



Quesito 4. Sia f un'obbligazione senza cedola con valore nominale iniziale $q_0 = -10$ e interesse complessivo $I = 20\%$ in 5 anni. Si calcoli il tasso di interesse (composto) annuo dell'obbligazione.

Nome: _____ . Classe: 3F.

Data: 20/05/2025.

Verifica di Matematica

Docente: G. Scattareggia.

Quesito 1. Si consideri l'ellisse γ di equazione

$$\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1.$$

- Si ricavi il dominio e l'espressione analitica della funzione f , il cui grafico Γ_f sia la semiellisse inferiore individuata da γ .
- Si studino eventuali simmetrie assiali di Γ_f .

Quesito 2. Si consideri un'ellisse γ di eccentricità $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e semiasse maggiore $a = 4$.

- Si calcoli il semiasse minore b di γ .
- Si scriva l'equazione di γ .
- Si dica se il punto $P(2, 1)$ appartiene a γ , motivando la risposta.

Quesito 3. Due iperboli con centro nell'origine hanno la stessa eccentricità e lo stesso valore del semiasse maggiore, ma hanno vertici e fuochi scambiati: la prima, γ_1 , ha i fuochi sull'asse x , la seconda, γ_2 , ha i fuochi sull'asse y . Si indichi con k il valore del semiasse maggiore di γ_1 , e si indichi con c la distanza di un qualsiasi fuoco di γ_1 dall'origine.

- Si scrivano le equazioni generiche delle due iperboli in funzione di k e di c .
- Si verifichi che le due iperboli si intersecano in 4 punti se e soltanto se

$$\sqrt{2}|k| < |c|.$$

- Assunto $\sqrt{2}|k| < |c|$, si ricavino, in funzione di k e di c , le coordinate di un punto qualsiasi di intersezione tra le due iperboli.

Quesito 4. Sia data la funzione f di equazione analitica:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 1}.$$

- Si determini il dominio naturale della funzione.
- Si dia la definizione di curva algebrica piana e di conica.
- Si dica se il grafico di f è una curva algebrica piana.
- Si dica se il grafico di f è una conica.